TD – Qui va avec qui ?

Dans la classe phénoménologique,
Il y a les signaux Ⓐ
Un signal transitoire est Ⓑ
Dans la classe dimensionnelle,
Il y a les signaux Ⓒ
Un signal continu à temps continu est un signal Ⓓ
Un signal de puissance moyenne finie est possiblement Ⓔ

Un signal discret à temps continu est un signal Ⓕ

Un signal discret à temps discret est un signal Ⓖ

① numérique

② 3D

③ aléatoire

④ périodique

⑤ quantifié

⑥ analogique

⑦ déterministe

⑧ d'énergie finie

⑨ 2D

TD – Qui va avec qui ?

Dans la classe phénoménologique,
Il y a les signaux Ⓐ

Un signal transitoire est Ⓑ

Dans la classe dimensionnelle,
Il y a les signaux Ⓒ

Un signal continu à temps continu est un signal Ⓓ

Un signal de puissance moyenne finie est possiblement Ⓔ

Un signal discret à temps continu est un signal Ⓕ

Un signal discret à temps discret est un signal Ⓖ

① numérique

② 3D

③ aléatoire

④ périodique

⑤ quantifié

⑥ analogique

⑦ déterministe

⑧ d’énergie finie

⑨ 2D

TD – Qui va avec qui ? BIS

Un signal déterministe à paramètres variables est Ⓐ

Signal périodique Ⓑ

Un signal aléatoire de moyenne constante est Ⓒ

Signal numérique Ⓓ

Signal continu Ⓔ

Un signal aléatoire de statistiques constante est Ⓕ

① Série de Fourier

② stationnaire au sens strict

③ Transformée de Fourier

④ non stationnaire

⑤ stationnaire à l'ordre 1

⑥ Transformée de Fourier Discrète

⑦ Fast Fourier Transform

TD – Qui va avec qui ? BIS

Un signal déterministe à paramètres variables est Ⓐ

Signal périodique Ⓑ

Un signal aléatoire de moyenne constante est Ⓒ

Signal numérique Ⓓ

Signal continu Ⓔ

Un signal aléatoire de statistiques constante est Ⓕ

① Série de Fourier

② stationnaire au sens strict

③ Transformée de Fourier

④ non stationnaire

⑤ stationnaire à l'ordre 1

⑥ Transformée de Fourier Discrète

⑦ Fast Fourier Transform

TD – Spectres

Donner les trois paramètres et tracer les spectres bilatéraux des signaux suivants :

$$s_1(t) = 3\cos(12\pi t + \frac{\pi}{2})$$

$$s_2(t) = \cos(100\pi t + \frac{\pi}{2}) + 5\cos(200\pi t)$$

$$s_3(t) = a\cos(\pi^2 t), a \text{ est une constante}$$

$$s_4(t) = \lambda, \lambda \text{ est une constante}$$

$$s_5(t) = \cos(t^2)$$

Que pouvez-vous dire sur le dernier signal ?

TD – Qui vas avec qui ? TER

Echantillonner dans le domaine temporel Ⓐ

① Spectre continu

Signal périodique Ⓑ

② Périodiser dans le domaine temporel

Echantillonner dans le domaine fréquentiel Ⓒ

③ Spectre de raies

④ Périodiser dans le domaine fréquentiel

Signal transitoire Ⓓ

TD – Qui vas avec qui ? TER

Echantillonner dans le domaine temporel Ⓐ

Signal périodique Ⓑ

Echantillonner dans le domaine fréquentiel Ⓒ

Signal transitoire Ⓓ

① Spectre continu

② Périodiser dans le domaine temporel

③ Spectre de raies

④ Périodiser dans le domaine fréquentiel

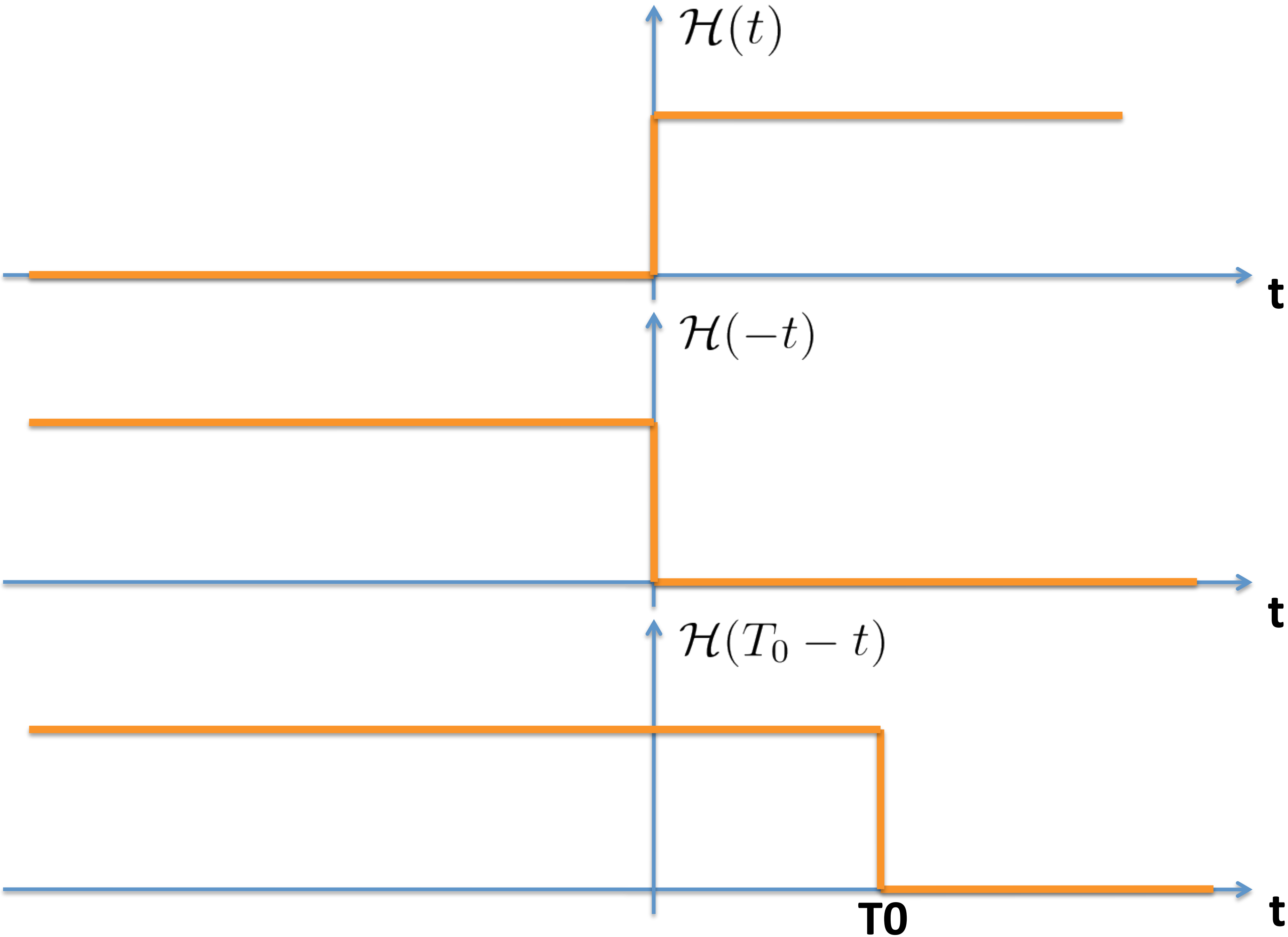
TD – L'échelon de Heaviside

Ce signal noté $\mathcal{H}(t)$ est nul pour les valeurs strictement négatives du temps et vaut un ailleurs :

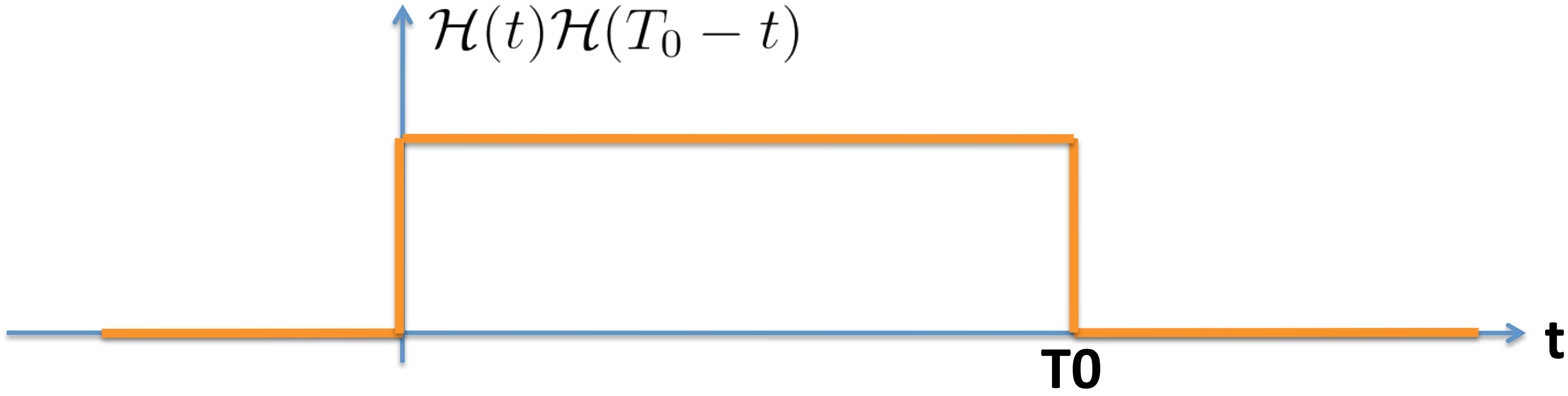
$$\mathcal{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

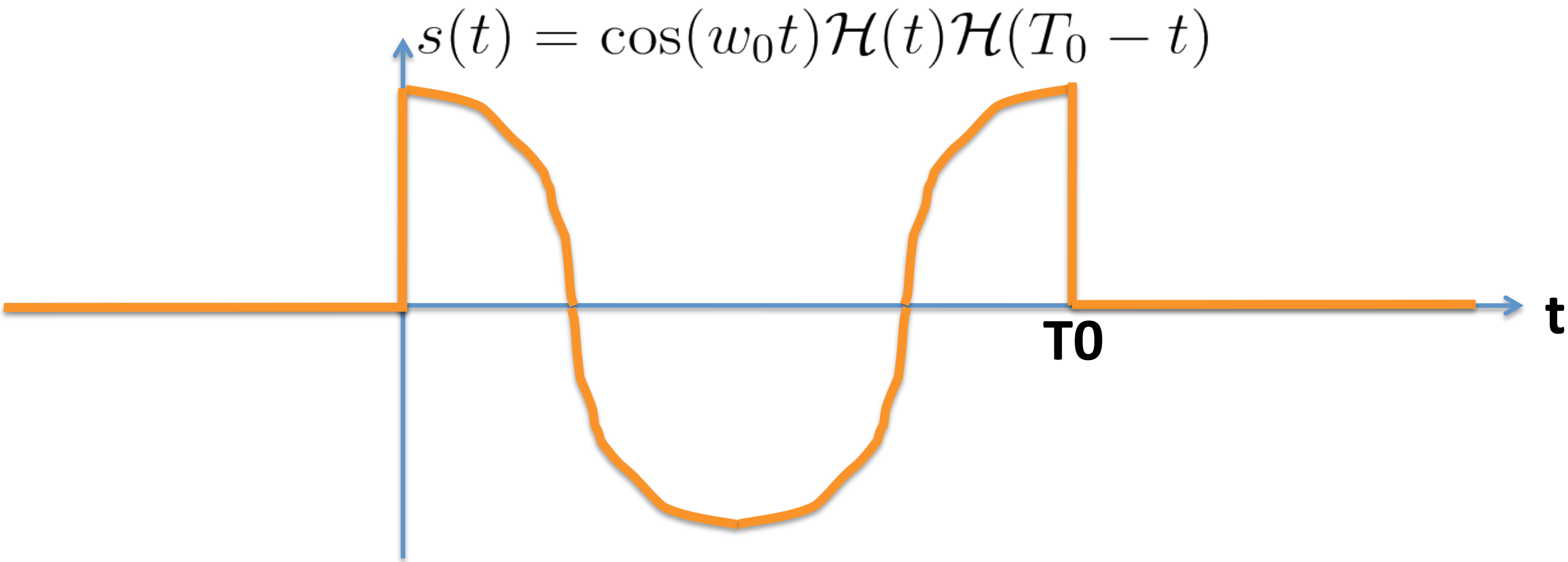
1. **Représenter** $\mathcal{H}(t)$
2. **Représenter** $\mathcal{H}(-t)$
3. **Représenter** $\mathcal{H}(T_0 - t)$
4. **Représenter** $\mathcal{H}(t)\mathcal{H}(T_0 - t)$
5. **Représenter** $s(t) = \cos(w_0 t)\mathcal{H}(t)\mathcal{H}(T_0 - t)$ **avec** $w_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

TD – L’échelon de Heaviside



TD – L'échelon de Heaviside





TD – Echantillonnage

On souhaite maintenant étudier l'expression de l'échantillonnage du signal précédent.
On notera cette expression de la façon suivante :

$$s^*(t) = s(t)\text{Ш}_{\frac{T_0}{4}}(t)$$

Où $\text{Ш}_{\frac{T_0}{4}}(t)$ **représente un peigne de Dirac de période T0/4**

1. **Développer l'expression de** $s^*(t)$
2. **Combien d'échantillons ont été prélevés sur** $s(t)$
3. **Donner l'expression du signal numérique résultant, noté** s_n
4. **Que devrait être la fréquence d'échantillonnage pour prélever 10 échantillons**

TD – Echantillonnage

$$s^*(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t - n\frac{T_0}{4}\right)$$

$$s^*(t) = \ldots + 0\delta\left(t + \frac{T_0}{4}\right) + s(0)\delta(t) + s\left(\frac{T_0}{4}\right)\delta\left(t - \frac{T_0}{4}\right) + s\left(2\frac{T_0}{4}\right)\delta\left(t - 2\frac{T_0}{4}\right) +$$

$$s\left(3\frac{T_0}{4}\right)\delta\left(t - 3\frac{T_0}{4}\right) + s\left(4\frac{T_0}{4}\right)\delta\left(t - 4\frac{T_0}{4}\right) + 0\delta\left(t - 5\frac{T_0}{4}\right) + \ldots$$

$$s^*(t) = 1\delta(t) + 0\delta\left(t - \frac{T_0}{4}\right) - 1\delta\left(t - \frac{T_0}{2}\right) + 0\delta\left(t - \frac{3T_0}{4}\right) + 1\delta(t - T_0)$$

5 échantillons sont prélevés

TD – Echantillonnage

$$s_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) \text{ si n} = \{0;1;2;3;4\} \\ 0 \text{ si } n > 4 \end{cases}$$

Le durée T0 est liée au nombre d'échantillons par la relation T0=(n-1)Te
Te étant la période d'échantillonnage.
Donc Fe = (n-1)/T0 = 9/T0 lorsque l'on souhaite avoir 10 échantillons

TD – Théorème d'échantillonnage

On souhaite échantillonner le signal déterministe suivant :

$$s(t) = 1 + cos(2\pi 10t) + cos(2\pi 15t)$$

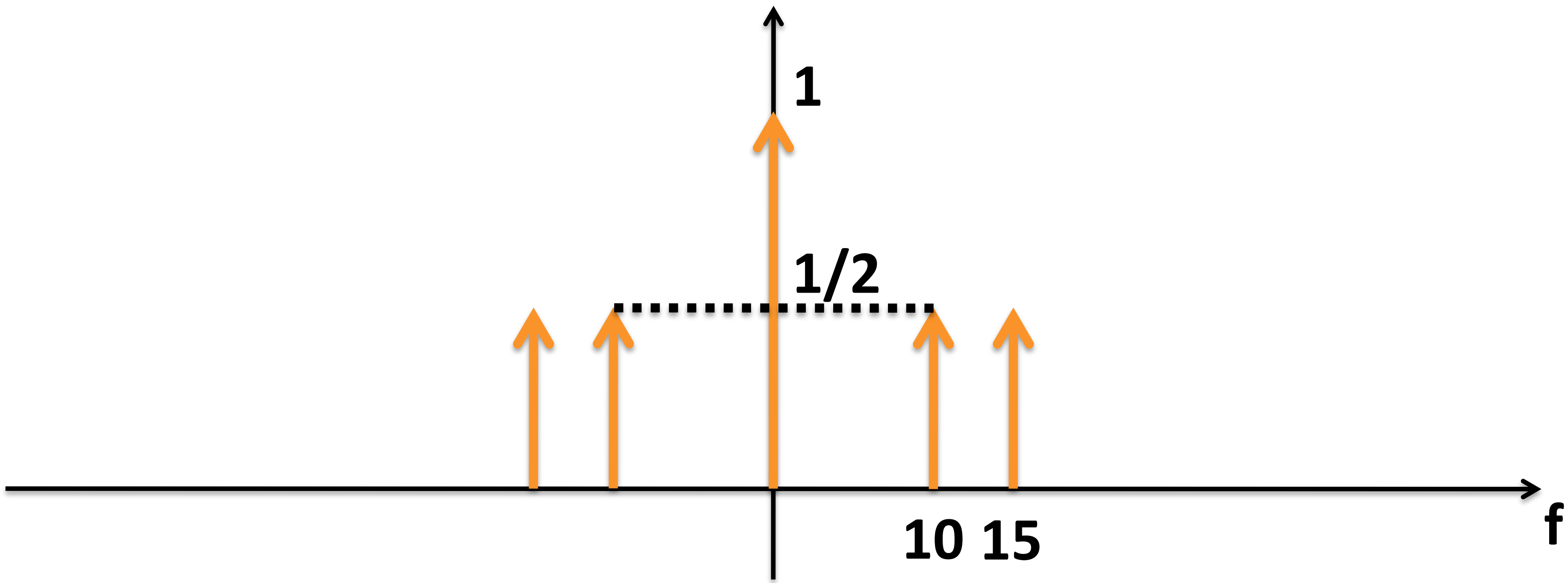
1. Que vaut la fréquence de Nyquist F_0 **?**
2. Ecrire et représenter le spectre d'amplitude de $s(t)$

3. Représenter le spectre d'amplitude de $s^*(t)$**, échantillonné de** $s(t)$ **dans le cas où** $F_e = 2F_0$ **sur [-120Hz,120Hz]**
4. Représenter le spectre d'amplitude de $s^*(t)$**, échantillonné de** $s(t)$ **dans le cas où** $F_e = \frac{F_0}{3}$ **sur [-15Hz,15Hz] et commentez**

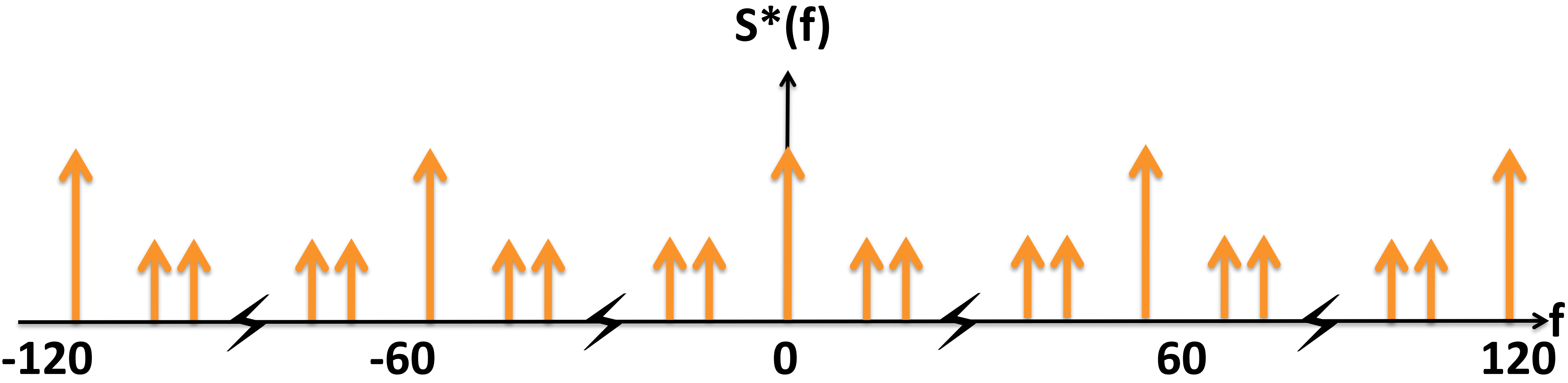
TD – Théorème d'échantillonnage

F0=2*15=30Hz

$$S(f) = \delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f+10) + \frac{1}{2}\delta(f-10) + \frac{1}{2}\delta(f+15) + \frac{1}{2}\delta(f-15)$$



TD – Théorème d'échantillonnage



TD – Théorème d'échantillonnage

	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30
0													
1													
2													
3													
-1													
-2													
-3													

f

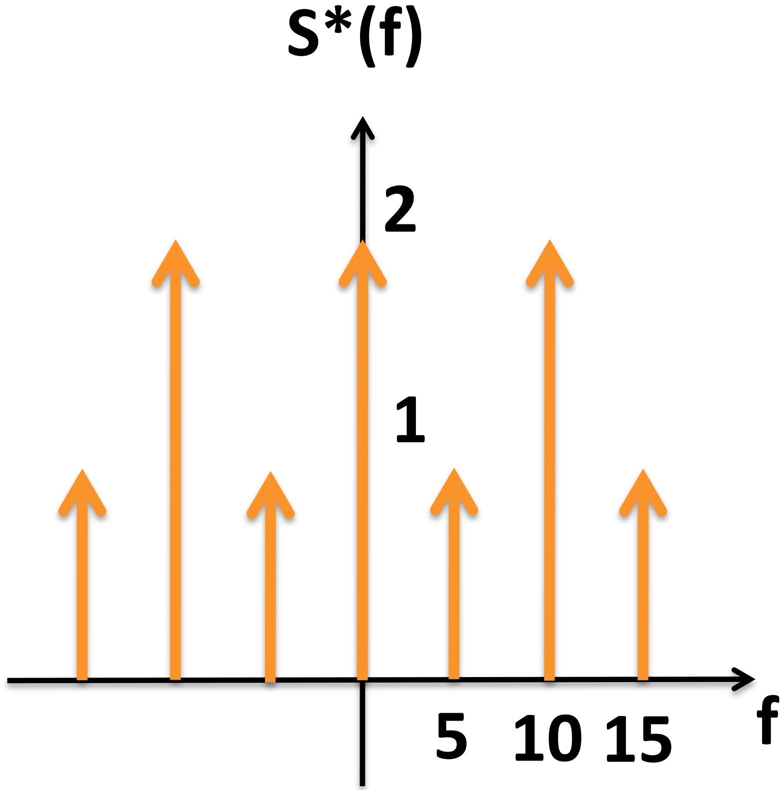
Coefficient de réplique

TD – Théorème d'échantillonnage

	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	f
0				1/2	1/2		1		1/2	1/2				
1						1/2	1/2		1		1/2	1/2		
2								1/2	1/2		1		1/2	
3										1/2	1/2		1	
-1		1/2	1/2		1		1/2	1/2						
-2	1/2		1		1/2	1/2								
-3	1		1/2	1/2										
				1	2	1	2	1	2	1				

Coefficient de réplique

TD – Théorème d'échantillonnage



Ce qui n'a rien à voir avec le signal réellement acquis

TD – Sur l'utilité du bloqueur en échantillonnage

On se propose de déterminer les fréquences d'échantillonnage maximales d'un CAN sans échantillonneur bloqueur.

Pour ce faire, on considère le signal sinusoïdal suivant :

$$s(t) = Asin(2\pi f t)$$

La résolution du CAN valant $q = \dfrac{2A}{2^n}$ **avec n le nombre de bits pour la conversion. Le temps de conversion sera noté** T_c

1. **Donner l'expression de la vitesse de variation de ce signal**
2. **En déduire la variation d'amplitude maximale associée pendant le temps de conversion**
3. **On souhaite que cette variation ne dépasse pas la moitié de la résolution du CAN. Donner alors l'expression de la fréquence maximale admissible du signal**
4. **On suppose que le CAN possède 12 bits. Donner la valeur de la fréquence maximale pour un temps de conversion de 10µs et conclure**

TD – Sur l'utilité du bloqueur en échantillonnage

$$\dot{s}(t) = A2\pi f \cos(2\pi f t)$$

$$\Delta s_{\max} = \dot{s}_{\max} T_c$$

$$\Delta s_{\max} = 2\pi A f T_c$$

TD – Sur l'utilité du bloqueur en échantillonnage

$$\Delta s_{\max} < \frac{q}{2} = \frac{2A}{2^{n-1}}$$

$$2\pi A f T_c < \frac{2A}{2^{n-1}}$$

$$f < \frac{1}{2^{n-1}\pi T_c}$$

$$f_{\max} \approx \frac{1}{2^{11}\pi 10^{-5}} \approx 15 Hz$$

Heureusement que les échantillonneurs bloqueurs existent !

TD – Bruit de quantification

On se propose d'étudier le rapport signal à bruit de quantification

$$SNR_{dB} = 10\log\left(\frac{Ps}{Pn}\right)$$

$$\text{avec } s(t) = A\sin(2\pi ft)$$

$$\text{et } n(t) \text{ bruit de quantification}$$

1. **Que vaut la puissance moyenne du signal (on suppose que le signal s'adapte à la pleine échelle du quantificateur) ?**
2. **Que vaut la puissance moyenne du bruit ?**
3. **En déduire la valeur du rapport en décibel.**
4. **On souhaite avoir un rapport supérieur ou égal à 74dB. Combien de bits sont nécessaires lors de la quantification ?**

TD – Bruit de quantification

$$\overline{P_s} = \frac{1}{T}\int_T s^2(t)dt$$

$$s^2(t) = A^2\sin^2(2\pi ft) = \frac{A^2}{2}\left[1-\cos(4\pi ft)\right]$$

$$\overline{P_s} = \frac{A^2}{2T}\left[\int_T dt - -\int_T \cos(4\pi ft)dt\right] = \frac{A^2}{2} \text{ avec } A = \frac{2^n - 1}{2}q$$

$$P_n = \frac{q^2}{12}$$

TD – Bruit de quantification

$$\frac{P_s}{P_n} = \frac{3}{2}\left(2^n - 1\right)^2$$

$$SNR_{dB} = 10\log\left(\frac{3}{2}\right) + 20\log\left(2^n - 1\right) \text{ pour } n \text{ suffisament grand } 2^n - 1 \approx 2^n$$

$$SNR_{dB} \approx 10\log\left(\frac{3}{2}\right) + 20\log\left(2^n\right) \approx 1.76 + 6.02n$$

TD – Bruit de quantification

$$1.76 + 6.02n \geq 74\,dB$$

$$n \geq \frac{74 - 1.76}{6.02}$$

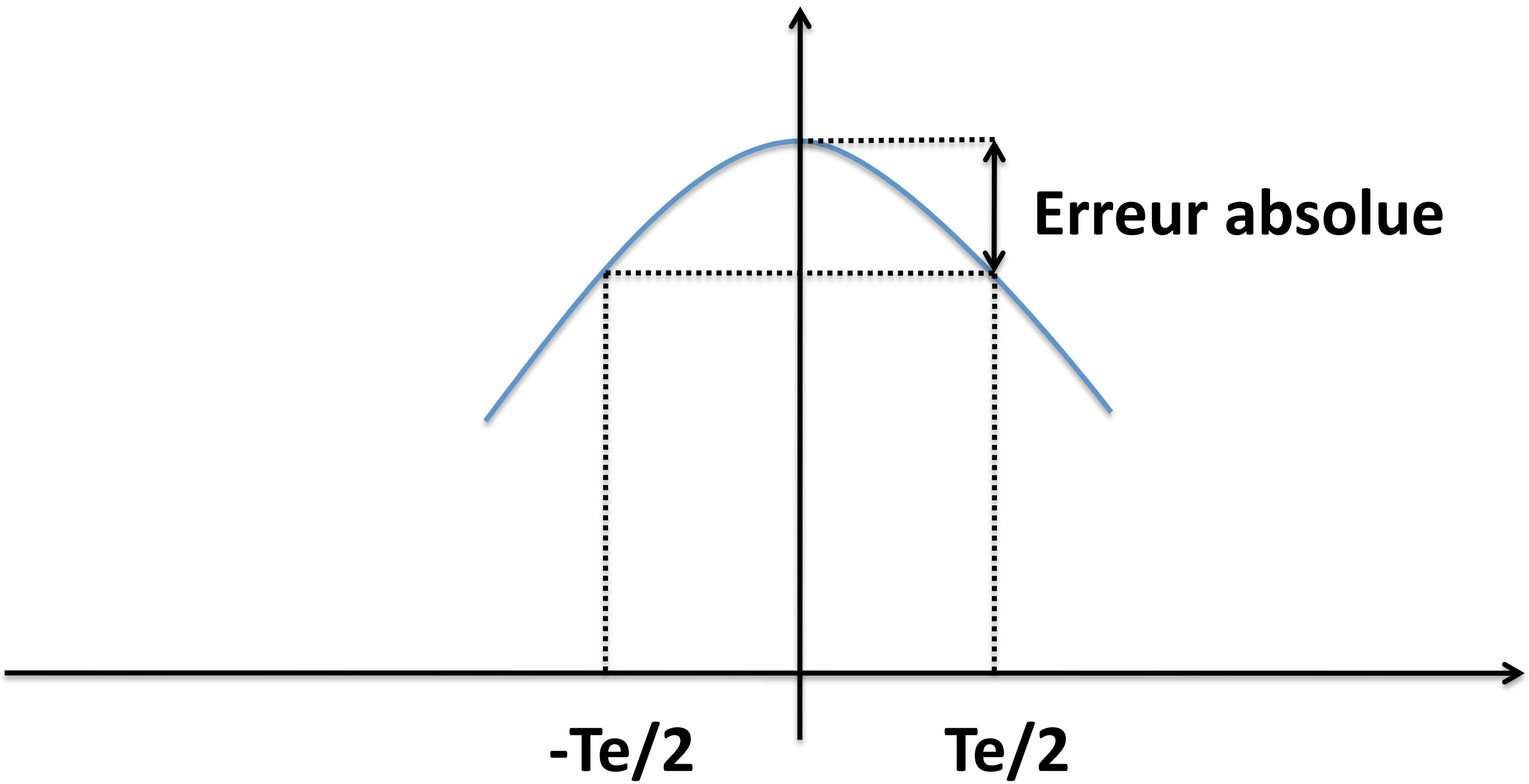
$$n = 12$$

TD – Génération de signaux

On se propose de déterminer la fréquence de génération minimale d'un signal cosinusoïdal de fréquence f_0 pour maximiser l'erreur relative de restitution, notée ε, causée par le bloquage.

1. **Quels sont les instants et sous quelle condition cette erreur ε est maximale ?**
2. **Exprimer alors ε.**
3. **Sachant que $\cos(x) \approx 1 - x^2/2$ pour x très petit, montrer que** $$\varepsilon = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{T_g}{T_0}\right)^2$$
4. **Donner l'expression de $f_{g_{\min}}$ en fonction de f_0 lorsqu'on admet une erreur absolue $\varepsilon_{\max}$ inférieure 1%. Commenter.**

Cette erreur est maximale aux extrema de la cosinusoïde et lorsque les échantillons sont équirépartis autour de ces points



TD – Génération de signaux

$$\varepsilon = \frac{A - A\cos\left(2\pi f_0 \frac{T_e}{2}\right)}{A} = 1 - \cos\left(2\pi f_0 \frac{T_e}{2}\right)$$

$$\varepsilon = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(2\pi f_0 \frac{T_e}{2}\right)^2\right)$$

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{f_0}{f_g}\right)^2$$

TD – Génération de signaux

$$\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{f_0}{f_g}\right)^2 < \varepsilon_{\max}$$

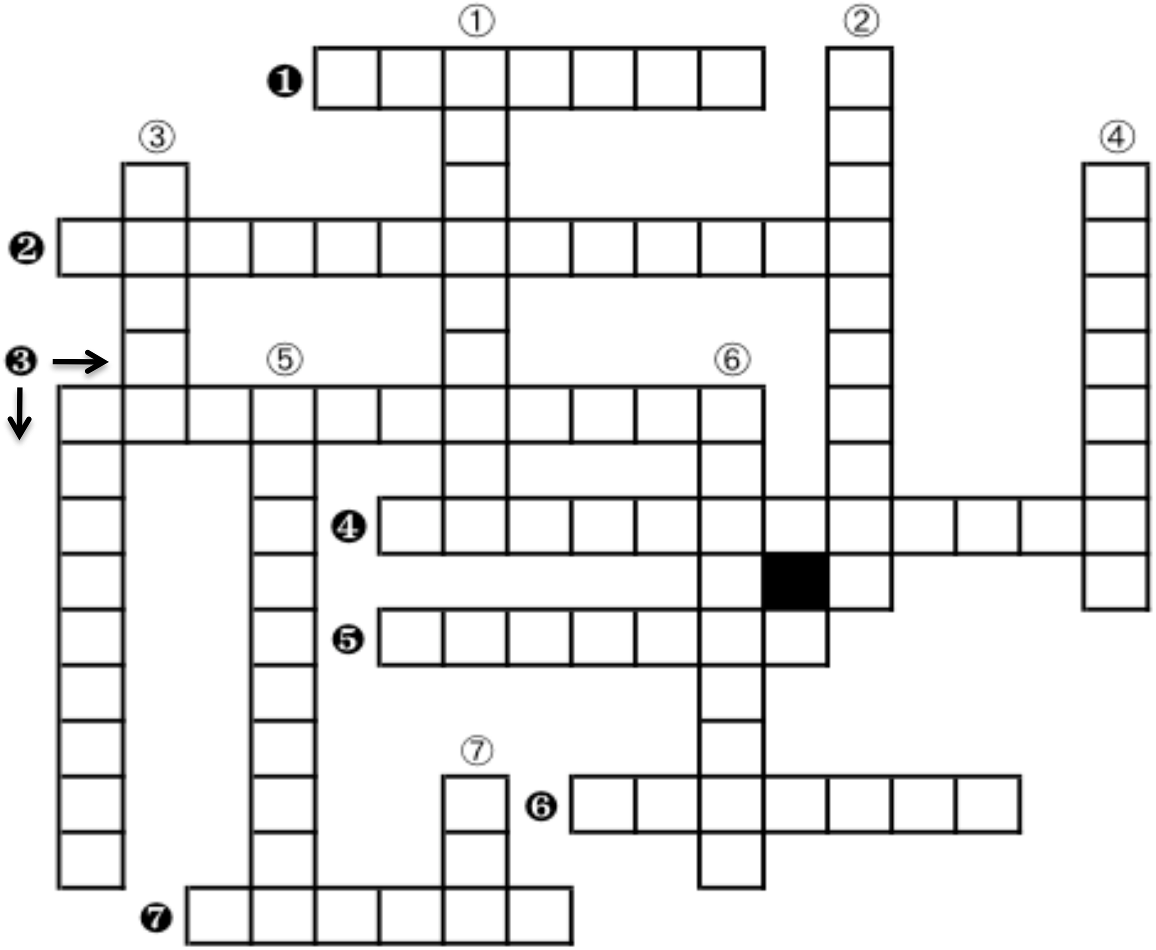
$$f_g > \frac{\pi f_0}{\sqrt{2\varepsilon_{\max}}} \approx 22\, f_0$$

Pour une restitution correcte et sans filtrage la fréquence d'échantillonnage devra être supérieure à 11 fois la fréquence de Nyquist !

Une fréquence de génération beaucoup plus grande que celle de Nyquist doit être utilisée :

Sur-échantillonnage

TD – Mots croisés !



VERTICALEMENT

① Signal imprévisible
② Lorsqu'on ne respecte pas Shannon
③ Une impulsion d'aire unitaire
❸ Signal de statistiques d'ensemble et temporelle équivalentes
④ Echantillonnage bloqueur
⑤ Signal continu à temps continu
⑥ Signal discret à temps discret
⑦ Puce pour numériser un signal

HORIZONTALEMENT

❶ Il a son théorème
❷ Un signal qui crée des distorsions
❸ Une valeur d'un signal numérique
❹ Signal bien connu
❺ Pas un fantôme mais un…
❻ Sans lui rien ne serait
❼ Celui-ci ne permet pas de se coiffer

TD – Mots croisés ! Soluce