L3 - CMI017 : Signaux et Systèmes

BULOUP Frank

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Aix Marseille université

INSTITUT DES SCIENCES DU MOUVEMENT ETIENNE JULES MAREY

Plan de cette séquence

Rappels 1/3

Rappel I

Un phénomène périodique élémentaire peut être caractérisé par une cosinusoïde d'amplitude, de phase et de fréquence spécifiques.

Rappels 1/3

Rappel I

Un phénomène périodique élémentaire peut être caractérisé par une cosinusoïde d'amplitude, de phase et de fréquence spécifiques.

Rappel II

Pratiquement tous les signaux périodiques peuvent être développés en série de Fourier. C.a.d. en combinaison linéaire de phénomènes périodiques élémentaires. Chacun de ces phénomènes étant caractérisés par le triplet [Amplitude, Phase, Fréquence]

Rappels 1/3

Rappel I

Un phénomène périodique élémentaire peut être caractérisé par une cosinusoïde d'amplitude, de phase et de fréquence spécifiques.

Rappel II

Pratiquement tous les signaux périodiques peuvent être développés en série de Fourier. C.a.d. en combinaison linéaire de phénomènes périodiques élémentaires. Chacun de ces phénomènes étant caractérisés par le triplet [Amplitude, Phase, Fréquence]

Rappel III

On peut représenter ces triplets de manière graphique sous la forme des spectres d'amplitude et de phase monolatéraux et bilatéraux.

Rappels 2/3

Rappel IV

Cette représentation permet de considérer les signaux d'un point de vue « fréquentiel » : à quelles fréquences le signal comporte-t-il de l'energie ?

Rappels 2/3

Rappel IV

Cette représentation permet de considérer les signaux d'un point de vue « fréquentiel » : à quelles fréquences le signal comporte-t-il de l'energie ?

Rappel V

La version numérique de l'analyse de Fourier est appelée Transformée de Fourier Discrète. Il existe un algorithme optimisé nommé Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform). La fonction Matlab **fft** permet de réaliser ce calcul.

Rappels 3/3

Rappel VI

On peut obtenir la réponse d'un SDLIT à n'importe quelle entrée en utilisant la relation de convolution entrée/réponse impulsionnelle :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k)h(n-k)$$

Que l'on peut réécrire de cette façon :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)e(n-k)$$

Cf. démo annexée.

Signaux et Systèmes

¿ Question ?

Quelle est la réponse d'un SDLIT lorsque son entrée est une cosinusoïde ? On notera $\mathcal{H}(z) = \rho(z)e^{i\phi(z)}$ sa fonction de transfert en z.

$$\begin{cases} \text{Signal d'entrée} \\ cos(2\pi f_0 n T_e) \end{cases} \longrightarrow \boxed{\quad \mathcal{H} \quad} \longrightarrow \begin{cases} \text{Signal de sortie} \\ ? \end{cases}$$

On peut réécrire l'entrée de la façon suivante :

$$e(n) = \frac{1}{2}[z_1^n + z_2^n]$$

Avec :

$$\begin{cases} z_1 & = e^{i\Omega_0} \\ z_2 & = e^{-i\Omega_0} = \overline{z_1} \\ \Omega_0 & = 2\pi \frac{f_0}{f_e} \end{cases}$$

On peut réécrire l'entrée de la façon suivante :

$$e(n) = \frac{1}{2}[z_1^n + z_2^n]$$

Avec :

$$\begin{cases} z_1 & = e^{i\Omega_0} \\ z_2 & = e^{-i\Omega_0} = \overline{z_1} \\ \Omega_0 & = 2\pi \frac{f_0}{f_e} \end{cases}$$

Pour trouver la sortie il faut résoudre l'équation de convolution :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)e(n-k)$$

On peut réécrire l'entrée de la façon suivante :

$$e(n) = \frac{1}{2}[z_1^n + z_2^n]$$

Avec :

$$\begin{cases} z_1 & = e^{i\Omega_0} \\ z_2 & = e^{-i\Omega_0} = \overline{z_1} \\ \Omega_0 & = 2\pi \frac{f_0}{f_e} \end{cases}$$

Pour trouver la sortie il faut résoudre l'équation de convolution :

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)e(n-k) \\ &= \frac{1}{2}z_1^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)z_1^{-k} + \frac{1}{2}z_2^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)z_2^{-k} \end{aligned}$$

On peut réécrire l'entrée de la façon suivante :

$$e(n) = \frac{1}{2}[z_1^n + z_2^n]$$

Avec :

$$\begin{cases} z_1 & = e^{i\Omega_0} \\ z_2 & = e^{-i\Omega_0} = \overline{z_1} \\ \Omega_0 & = 2\pi\frac{f_0}{f_e} \end{cases}$$

Pour trouver la sortie il faut résoudre l'équation de convolution :

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)e(n-k) \\ &= \frac{1}{2}z_1^n \cdot \color{red}{\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)z_1^{-k}} \color{black}{+ \frac{1}{2}z_2^n \cdot} \color{green}{\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)z_2^{-k}} \\ &= \frac{1}{2}z_1^n \cdot \color{red}{\mathcal{H}(z_1)} \color{black}{+ \frac{1}{2}z_2^n \cdot} \color{green}{\mathcal{H}(z_2)} \end{aligned}$$

Comme $h(n)$ est réelle, on a $\overline{\mathcal{H}(e^{i\Omega_0})} = \mathcal{H}(e^{-i\Omega_0})$, c.a.d que $\overline{\mathcal{H}(z_1)} = \mathcal{H}(z_2)$ et de plus $z_2^n = \overline{z_1^n}$. Une fois les calculs effectués, on trouve :

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{1}{2} z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1) + \frac{1}{2} \overline{z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1)} \\ &= \Re[z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1)] \\ s(n) &= \color{red}{\boldsymbol{\rho(z_1)}} cos[\Omega_0 n + \color{green}{\boldsymbol{\phi(z_1)}}] \end{aligned}$$

Comme $h(n)$ est réelle, on a $\overline{\mathcal{H}(e^{i\Omega_0})} = \mathcal{H}(e^{-i\Omega_0})$, c.a.d que $\overline{\mathcal{H}(z_1)} = \mathcal{H}(z_2)$ et de plus $z_2^n = \overline{z_1^n}$. Une fois les calculs effectués, on trouve :

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{1}{2} z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1) + \frac{1}{2}\overline{z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1)} \\ &= \Re[z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1)] \\ s(n) &= \boldsymbol{\rho(z_1)} cos[\Omega_0 n + \boldsymbol{\phi(z_1)}] \end{aligned}$$

La sortie est donc également une cosinusoïde de même fréquence que l'entrée. Mais :

Comme $h(n)$ est réelle, on a $\overline{\mathcal{H}(e^{i\Omega_0})} = \mathcal{H}(e^{-i\Omega_0})$, c.a.d que $\overline{\mathcal{H}(z_1)} = \mathcal{H}(z_2)$ et de plus $z_2^n = \overline{z_1^n}$. Une fois les calculs effectués, on trouve :

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{1}{2} z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1) + \frac{1}{2}\overline{z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1)} \\ &= \Re[z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1)] \\ s(n) &= \rho(z_1) cos[\Omega_0 n + \phi(z_1)] \end{aligned}$$

La sortie est donc également une cosinusoïde de même fréquence que l'entrée. Mais :

- **son amplitude a été pondérée par le module de la fonction de transfert du système à cette fréquence**

Comme $h(n)$ est réelle, on a $\overline{\mathcal{H}(e^{i\Omega_0})} = \mathcal{H}(e^{-i\Omega_0})$, c.a.d que $\overline{\mathcal{H}(z_1)} = \mathcal{H}(z_2)$ et de plus $z_2^n = \overline{z_1^n}$. Une fois les calculs effectués, on trouve :

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{1}{2} z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1) + \frac{1}{2}\overline{z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1)} \\ &= \Re[z_1^n \cdot \mathcal{H}(z_1)] \\ s(n) &= \rho(z_1) cos[\Omega_0 n + \phi(z_1)] \end{aligned}$$

La sortie est donc également une cosinusoïde de même fréquence que l'entrée. Mais :

- **son amplitude a été pondérée par le module de la fonction de transfert du système à cette fréquence**
- **sa phase a été augmentée de l'argument de la fonction de transfert du système à cette fréquence.**

¿ Question ? ⇒ Réponse !

Quelle est la réponse d'un SDLIT lorsque son entrée est une cosinusoïde ? On notera $\mathcal{H}(z) = \rho(z)e^{i\phi(z)}$ sa fonction de transfert en z.

$$\begin{cases} \text{Signal d'entrée} \\ cos(2\pi f_0 n T_e) \end{cases} \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow \begin{cases} \text{Signal de sortie} \\ s(n) = \\ \rho(f_0) cos[2\pi f_0 n T_e + \phi(f_0)] \end{cases}$$

Avec :

- $\rho(f_0) = \left| \mathcal{H}\left(e^{i2\pi \frac{f_0}{f_e}} \right) \right|$
- $\phi(f_0) = Arg\left[\mathcal{H}\left(e^{i2\pi \frac{f_0}{f_e}} \right) \right]$

Remarque I

Mais d'après les séries de Fourier, presque tous signal peut être décomposé en somme de cosinusoïdes. On peut donc représenter l'entrée d'un système comme une somme de cosinusoïdes.

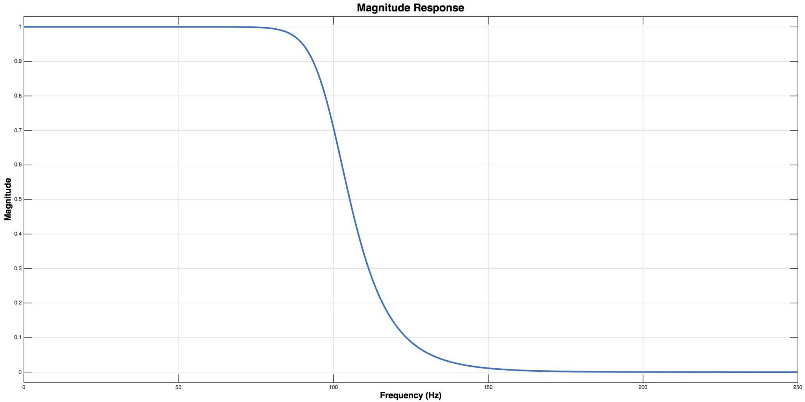
Remarque I

Mais d'après les séries de Fourier, presque tous signal peut être décomposé en somme de cosinusoïdes. On peut donc représenter l'entrée d'un système comme une somme de cosinusoïdes.

Remarque II

Comme on ne considère que les SDLIT, la sortie sera également une composition de cosinusoïdes dont les amplitudes et les phases seront modifiées par les caractéristiques de la fonction de transfert du système aux fréquences présentent dans le signal d'entrée.

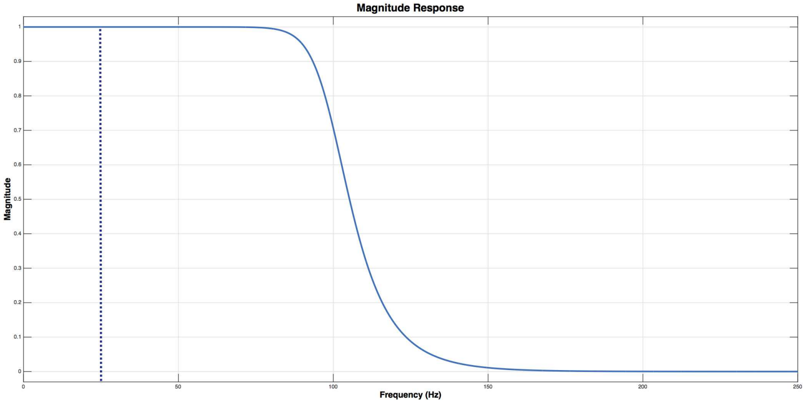
Signal d'entrée : $e(n) = 2 \cdot cos(2\pi 25 n T_e) + 6 \cdot cos(2\pi 100 n T_e)$



¿ Question ?

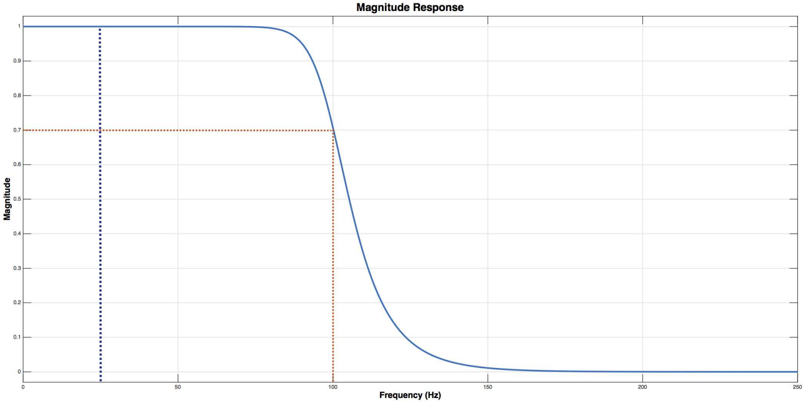
Quelles sont les amplitudes des sinusoïdes en sortie du système ?

Illustration



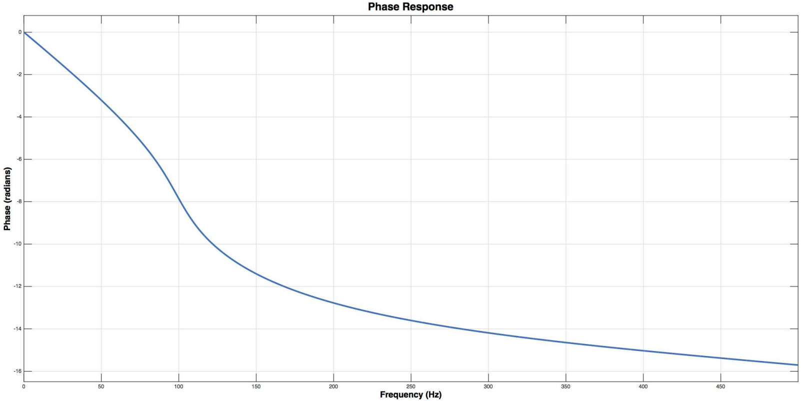
- À 25Hz, le «gain» est de 1

Illustration



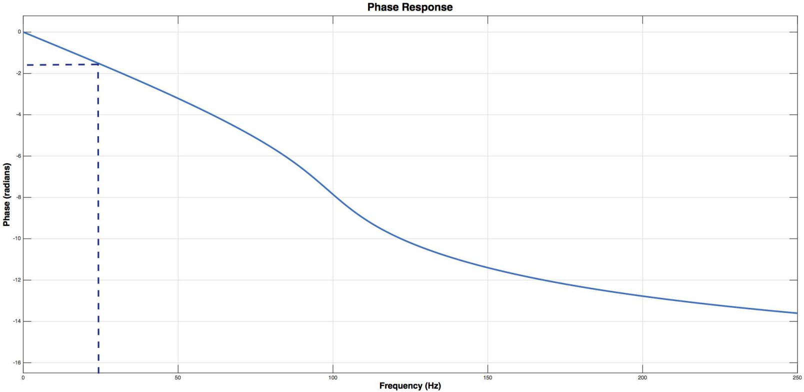
- À $25Hz$, le «gain» est de 1
- À $100Hz$, il est d'environ 0.7

Signal d'entrée : $e(n) = 2 \cdot cos(2\pi 25 n T_e) + 6 \cdot cos(2\pi 100 n T_e)$

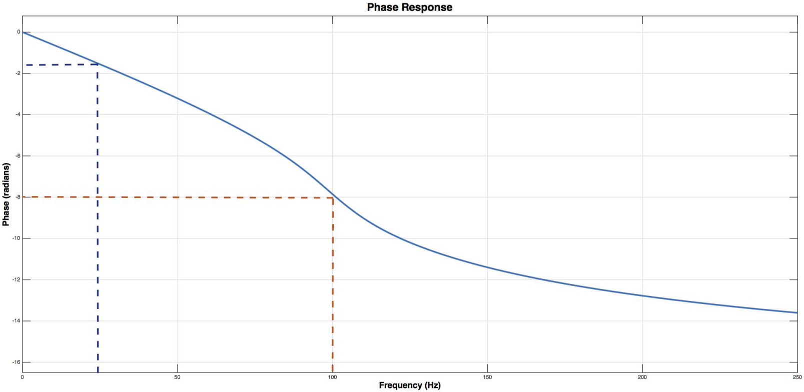


¿ Question ?

Quelles sont les «décalages» des phases des sinusoïdes en sortie du système ?



- À $25Hz$, le «décalage» de phase est d'environ $-1.5rd$



- À $25Hz$, le «décalage» de phase est d'environ $-1.5rd$
- À $100Hz$, il est d'environ $-8rd$

Le signal de sortie du système est donc le suivant :

$$\begin{aligned} s(n) &= 1 \cdot 2 \cdot cos(2\pi 25 n T_e - 1.5) + 0.7 \cdot 6 \cdot cos(2\pi 100 n T_e - 8) \\ &= 2 \cdot cos(2\pi 25 n T_e - 1.5) + 0.42 \cdot cos(2\pi 100 n T_e - 8) \end{aligned}$$

¿ Question ?

Comment effectuer le tracé de ces réponses en fréquence ?

¿ Question ?

Comment effectuer le tracé de ces réponses en fréquence ?

- La fonction de transfert est $\mathcal{H}(z)$

¿ Question ?

Comment effectuer le tracé de ces réponses en fréquence ?

- La fonction de transfert est $\mathcal{H}(z)$
- d'après ce que l'on vient de voir, $z = e^{2i\pi\frac{f}{f_e}}$ pour une entrée cosinusoïdale de fréquence f

¿ Question ?

Comment effectuer le tracé de ces réponses en fréquence ?

- La fonction de transfert est $\mathcal{H}(z)$
- d'après ce que l'on vient de voir, $z = e^{2i\pi\frac{f}{f_e}}$ pour une entrée cosinusoïdale de fréquence f
- Il suffit donc de remplacer z par cette valeur dans $\mathcal{H}$, d'en calculer le module $\rho(f)$ et la phase $\phi(f)$ et d'étudier ces deux fonctions pour f variant de 0 à $\frac{f_e}{2}$

Exercice I - Réponse en fréquence d'un SDLIT avec Matlab

Soit le SDLIT dont la fonction de transfert en z est :

$$\mathcal{H}(z) = 1 + z^{-1}$$

Ce système agit sur un signal dont la fréquence d'échantillonnage a été de 1000 Hertz et la durée d'enregistrement de 10 secondes.

1. Créer le vecteur fréquenciel associé pour une étude entre $[0; \frac{f_e}{2}]$
2. Calculer le module de $\mathcal{H}$.
3. Calculer l'argument de $\mathcal{H}$.
4. Tracer ces deux fonctions dans une même fenêtre graphique.
5. Si le signal d'entrée est de la forme $3cos(2\pi 400 n T_e)$, quelle est l'expression du signal de sortie.
6. Retrouver tous ces résultats par le calcul analytique.

Signaux et Systèmes

Exercice II - Étude de la réponse en fréquence d'un SDLIT

Étudier la réponse en fréquence sur l'intervalle $[0; \frac{f_e}{2}]$ du SDLIT dont la fonction de transfert en z est la suivante :

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Quelle est la réponse du système au signal suivant :

$$e(t) = cos(200\pi n T_e) + cos(800\pi n T_e)$$

lorsque $T_e = 1ms$

Signaux et Systèmes

Équivalence entre $\sum_{k=0}^{+\infty} e(k)h(n-k)$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} e(n-k)h(k)$

$$\boxed{s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k)h(n-k)}$$

Posons : $m = n - k \Leftrightarrow k = n - m$
Quand $k = 0$, $m = n$ et quand $k = +\infty$, $m = -\infty$. Donc :

$$s(n) = \sum_{m=n}^{-\infty} e(n-m)h(m) = \sum_{m=-\infty}^{n} e(n-m)h(m)$$

Mais $h(m)$ est nul lorsque $m < 0$ et $e(n-m)$ est nul quand $n-m < 0$, c.a.d. quand $m > n$. Finalement :

$$\boxed{s(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} e(n-m)h(m)}$$