

L3 - CMI017 : Signaux et Systèmes

BULOUP Frank

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement



Plan de cette séquence

- 1 Représentations des phénomènes périodiques
- 2 La Transformée de Fourier Discrète
- 3 Home work !

Rappels 1/3

Rappel I

Les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle d'un système permettent d'obtenir une relation temporelle E/S générique : convolution entre entrée et réponse impulsionnelle du système.

Rappels 1/3

Rappel I

Les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle d'un système permettent d'obtenir une relation temporelle E/S générique : convolution entre entrée et réponse impulsionnelle du système.

Rappel II

La fonction de transfert en z d'un SDLIT s'obtient en remplaçant $\mathcal{R}$ par z^{-1} dans la fonction de transfert en $\mathcal{R}$.

Rappels 1/3

Rappel I

Les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle d'un système permettent d'obtenir une relation temporelle E/S générique : convolution entre entrée et réponse impulsionnelle du système.

Rappel II

La fonction de transfert en z d'un SDLIT s'obtient en remplaçant $\mathcal{R}$ par z^{-1} dans la fonction de transfert en $\mathcal{R}$.

Rappel III

La TZ de la réponse impulsionnelle d'un SDLIT est sa fonction de transfert en z .

Rappels 2/3

Rappel IV

Généralement, la fonction de transfert en z d'un SDLIT est une fonction rationnelle de la variable z et possède, à ce titre, des zéros et des pôles :

1. le système est alors bouclé, on dit aussi récursif, et sa réponse impulsionnelle est infinie
2. si les modules des pôles sont inférieurs à un, le système est stable

Rappels 3/3

Rappel V

Si la fonction de transfert en z ne possède pas de dénominateur, donc pas de pôles :

1. le système est non bouclé, on dit aussi non récursif, et sa réponse impulsionnelle est finie
2. le système est toujours stable

Signaux et Systèmes

- 1 Représentations des phénomènes périodiques
- 2 La Transformée de Fourier Discrète
- 3 Home work !

Phénomène périodique élémentaire

La cosinusoïde est le phénomène périodique le plus simple :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Avec :

- A : l'amplitude de l'oscillation
- ϕ : la phase en *rad*
- $\omega_0 = 2\pi f_0$: pulsation (fréquence angulaire) en *rad · s⁻¹*
- f_0 : la fréquence en *Hz*. $f_0 = \frac{1}{T_0}$, T_0 étant la période en *s*

Phénomène périodique élémentaire

La cosinusoïde est le phénomène périodique le plus simple :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Avec :

- A : l'amplitude de l'oscillation
- ϕ : la phase en *rad*
- $\omega_0 = 2\pi f_0$: pulsation (fréquence angulaire) en *rad · s⁻¹*
- f_0 : la fréquence en *Hz*. $f_0 = \frac{1}{T_0}$, T_0 étant la période en *s*

Phénomène périodique plus complexe

- superposition de phénomènes périodiques élémentaires
- les fréquences sont des multiples d'une fréquence de référence
- Cette fréquence est appelée la fondamentale

Remarque

Une superposition de phénomènes périodiques élémentaires n'est pas forcément périodique. Par exemple :

$$x(t) = \cos(2x) + \cos(\pi x)$$

n'est pas périodique parce qu'il n'existe pas d'entiers p et q tels que :

$$p \times 2 = q \times \pi$$

puisque π est irrationnel.

Autre notation

$$\begin{aligned}
 x(t) = A \cos(2\pi ft + \phi) &= \Re[Ae^{i(2\pi ft + \phi)}] \\
 &= \frac{Ae^{i(2\pi ft + \phi)} + Ae^{-i(2\pi ft + \phi)}}{2}
 \end{aligned}$$

Puisque :

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \cdot \sin(\theta)$$

Série de Fourier - Cas général

Presque tout signal périodique, noté $x(t)$, peut être décomposé en superposition de « cosinusoïdes » :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{2i\pi k f_0 t}$$

Les paramètres de cette décomposition sont donnés par le calcul de l'intégrale suivante :

$$X(k) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-2i\pi k f_0 t} dt$$

Exercice I - Propriétés de la Série de Fourier lorsque $x(t)$ est réel

On supposera maintenant et dans toute la suite du cours que $x(t)$ est réel. $X(k)$ est un nombre complexe que l'on peut noter de la façon suivante :

$$X(k) = \rho(k)e^{i\phi(k)}$$

Avec :

- $\rho(k) = |X(k)|$, le module.
 - $\phi(k) = \arg[X(k)]$, la phase.
1. Quelle est l'expression de $X(0)$? Commentez.
 2. Quelles propriétés vérifient $\rho(k)$ et $\phi(k)$ lorsque $x(t)$ est réel ?
 3. Proposez alors une autre écriture de $x(t)$ en fonction de $\rho(k)$ et $\phi(k)$ qui ne prenne en compte que les fréquences positives ou nulle ($k \geq 0$).

Exercice II - Synthèse d'un signal triangulaire

Avec Matlab créez un script et collez le code suivant dedans :

```
clear all; close all; clc;
time = 0:.001:2;
x = 0;
for k = 0:2
    rho = 4/((2*k+1)*pi)^2; phi = -pi;
    x = x+2*rho*cos(2*pi*(2*k+1)*time+phi);
    plot(time, x);
    title(['k = ', int2str(k)]);
    xlabel('time'); ylabel('x(t)');
    pause(0.15);
end
```

Augmentez le nombre de termes de la série et concluez.

Exercice III - Synthèse d'un signal carré

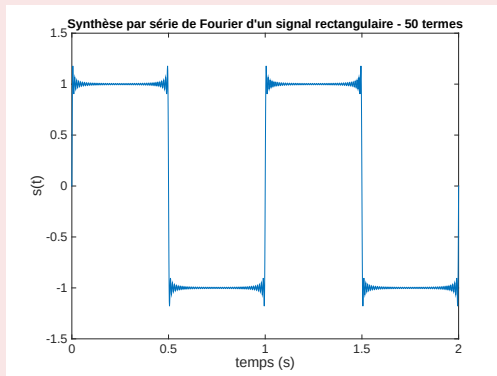
Avec Matlab créez un script et collez le code suivant dedans :

```
clear all; close all; clc;
time = 0:.001:2;
x = 0;
for k = 0:2
    rho = 2/((2*k+1)*pi); phi = -pi/2;
    x = x+2*rho*cos(2*pi*(2*k+1)*time+phi);
    plot(time, x);
    title(['k = ', int2str(k)]);
    xlabel('time'); ylabel('x(t)');
    pause(0.15);
end
```

Augmentez le nombre de termes de la série et concluez.

Phénomène de GIBBS

Si le signal comporte des discontinuités, des oscillations apparaissent autour de celles-ci sans diminuer en amplitude avec l'augmentation du nombre de termes de la série. En savoir plus.



Spectres d'un signal périodique

On peut représenter le nombre complexe $X(k)$ associé à $x(t)$ sous la forme de deux graphes :

- **Spectre d'amplitude** : on représente $|X(k)|$ en fonction de kf_0
- **Spectre de phase** : on représente $\arg[X(k)]$ en fonction de kf_0

On peut tracer ces **spectres** sur les fréquences positives uniquement. Dans ce cas ils sont qualifiés de **monolatéraux**. Si on les trace sur tout le support fréquentiel, ils sont dits **bilatéraux**.

Spectre d'amplitude

lié à l'amplitude $\Leftrightarrow$ répartition énergétique

**Quelles sont les oscillations élémentaires
porteuses d'énergie ?**

Spectre d'amplitude

lié à l'amplitude $\Leftrightarrow$ répartition énergétique

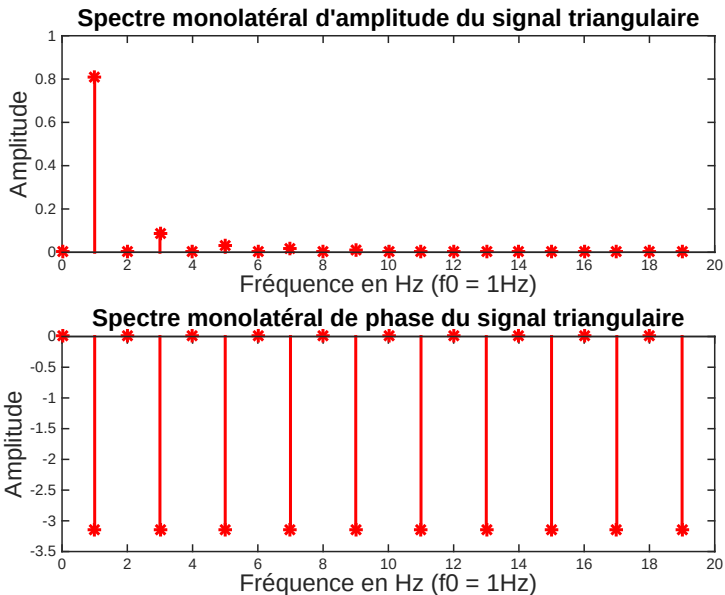
Quelles sont les oscillations élémentaires porteuses d'énergie ?

Spectre de phase

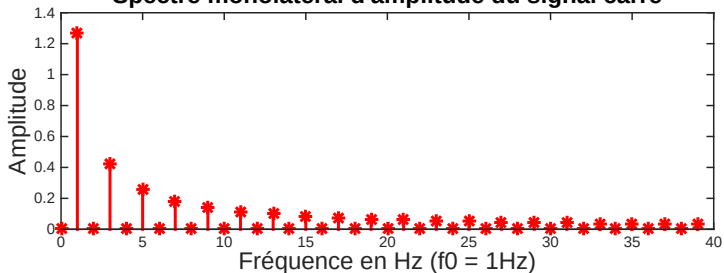
lié à la phase $\Leftrightarrow$ répartition temporelle

De quelle façon doivent se recombier ces oscillations élémentaires significatives pour reconstituer le signal ?

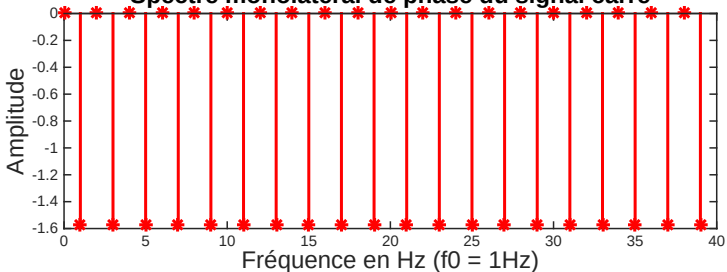
La phase contient toute l'information temporelle
Elle est plus difficile à interpréter et à mettre en oeuvre



Spectre monolatéral d'amplitude du signal carré



Spectre monolatéral de phase du signal carré



Signaux et Systèmes

- 1 Représentations des phénomènes périodiques
- 2 La Transformée de Fourier Discrète
- 3 Home work !

Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N - 1)T_e$, N étant le nombre d'échantillons et T_e la période d'échantillonnage.

Exercice IV - Résolution de TFD

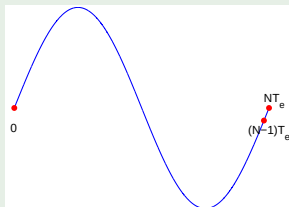
Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?

Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N - 1)T_e$, N étant le nombre d'échantillons et T_e la période d'échantillonnage.

Exercice IV - Résolution de TFD

Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?

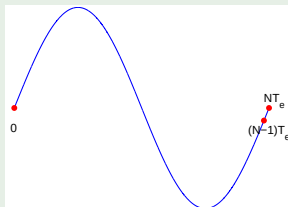


Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N - 1)T_e$, N étant le nombre d'échantillons et T_e la période d'échantillonnage.

Exercice IV - Résolution de TFD

Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?



$$\Delta f = \frac{1}{NT_e} \text{ à comparer à } f_0 \text{ dans la série de Fourier}$$

Transformée de Fourier Discrète

En partant des observations précédentes, on peut en déduire la formulation discrète de la série de Fourier :

$$X(kf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-2i\pi kf_0 t} dt$$

$$X(k\Delta f) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2i\pi k \frac{1}{NT_e} nT_e T_e}$$

$$X(k\Delta f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Avec $\Delta f = \frac{1}{NT_e}$, résolution fréquentielle de la TFD

On peut réécrire cette TFD de la façon suivante :

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

et en posant $z = e^{2i\pi \frac{k}{N}}$, son expression devient :

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

qui est, au facteur $\frac{1}{N}$ près, la TZ de $x(n)$

Transformée de Fourier Rapide, TFR

La TFR est un algorithme optimisé de la TFD

Exercice V - Spectre d'amplitude d'un signal avec Matlab

On a acquis 100 échantillons du signal suivant :

$$x(t) = 2 \cdot \cos(2\pi 100t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 200t) + \cos(2\pi 250t)$$

avec un pas d'échantillonnage de 1ms.

1. Simuler cette acquisition dans un script Matlab.
2. Utiliser les fonctions **fft** et **fftshift** pour calculer la TFR de ce signal.
3. Calculer **magFFTX**, le module de cette TFR (utiliser **abs**).
4. Créer le vecteur fréquentiel pour une représentation bilatérale.
5. Tracer le spectre d'amplitude (utiliser la fonction **stem**).

Signaux et Systèmes

- 1 Représentations des phénomènes périodiques
- 2 La Transformée de Fourier Discrète
- 3 Home work !

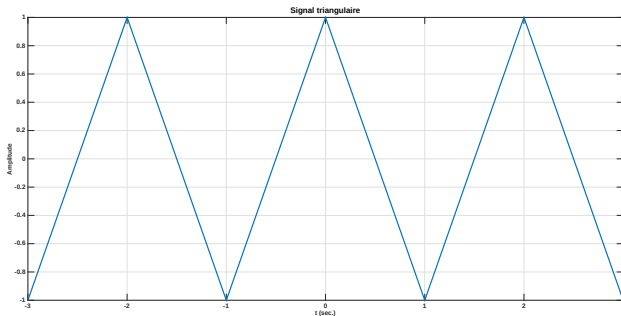
Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Pour les signaux triangulaire et carré ci-après :

1. Calculer les coefficients complexes des séries de Fourier associées.
2. Tracer les spectres d'amplitude et de phase correspondants.

Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Signal triangulaire :



Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Signal carré :

