L3 - CMI017 : Signaux et Systèmes

BULOUP Frank

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Plan de cette séquence

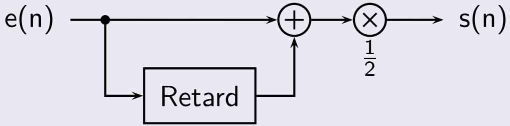
1. Fonction de transfert en $\mathcal{R}$
2. Home work !

Signaux et Systèmes

Équation aux différences de S_1

$$s(n) = \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$

Diagramme bloc de S_1



Pensez maintenant en terme de signal et pas d'échantillon

Les noeuds des diagrammes blocs représent les signaux, l'ensemble des échantillons

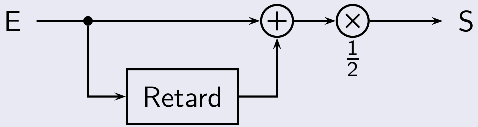
Les opérateurs agissent sur le signal et pas uniquement sur un seul de ses échantillons

Pensez maintenant en terme de signal et pas d'échantillon

Les noeuds des diagrammes blocs représent les signaux, l'ensemble des échantillons

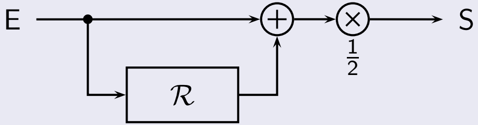
Les opérateurs agissent sur le signal et pas uniquement sur un seul de ses échantillons

Diagramme bloc de S_1



E et S sont des « vecteurs » d'échantillons

Diagramme bloc de S_1



L'opérateur de Retard se traduit alors comme un décalage vers la droite, noté $\mathcal{R}$ pour « right shift »

Notation

$\mathcal{R}$: opérateur de décalage vers la droite (retard d'un échantillon)

On note : $S = \mathcal{R}\{E\} = \mathcal{R}E$

S et E représentent les signaux $s(n)$ et $e(n)$ pour l'ensemble de leurs échantillons

Notation

$\mathcal{R}$: opérateur de décalage vers la droite (retard d'un échantillon)

On note : $S = \mathcal{R}\{E\} = \mathcal{R}E$

S et E représentent les signaux $s(n)$ et $e(n)$ pour l'ensemble de leurs échantillons

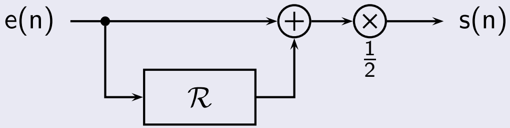
Conséquence

On peut écrire simplement, à partir du diagramme bloc ou de l'équation aux différences, une relation entrée/sortie polynomiale en $\mathcal{R}$

Équation aux différences de S_1

$$s(n) = \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$

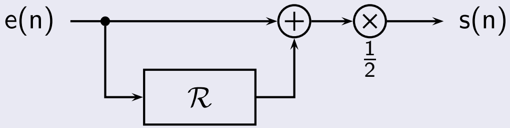
Diagramme bloc de S_1



Équation aux différences de S_1

$$s(n) = \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$

Diagramme bloc de S_1



Notation en $\mathcal{R}$

$$S = \frac{E + \mathcal{R}E}{2} = \frac{1+\mathcal{R}}{2}E \Leftrightarrow \frac{S}{E} = \mathcal{H}_1(\mathcal{R}) = \frac{1+\mathcal{R}}{2}$$

Exercice I - Utilisation de la notation en $\mathcal{R}$

On met en cascade deux systèmes S_1.

1. Quelle est la notation en $\mathcal{R}$ de ce nouveau système S_2 à partir :
   1.1. de l'équation aux différences de S_1 ?
   1.2. du diagramme blocs de S_1 ?
   1.3. En déduire l'expression de $\mathcal{H}_2(\mathcal{R})$
2. Quelle est la réponse impulsionnelle de ce nouveau système ? (utiliser la fonction **impz** de Matlab sur une dixaine d'échantillons)

Exercice I - À partir de l'équation aux différences

$$s_1(n) = \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$
$$s(n) = \frac{s_1(n) + s_1(n-1)}{2}$$

Exercice I - À partir de l'équation aux différences

$$s_1(n) = \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$

$$s(n) = \frac{s_1(n) + s_1(n-1)}{2}$$

$$s(n) = \frac{\frac{e(n)+e(n-1)}{2} + \frac{e(n-1)+e(n-2)}{2}}{2}$$

Exercice I - À partir de l'équation aux différences

$$s_1(n) = \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$

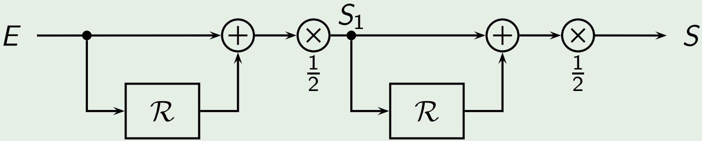
$$s(n) = \frac{s_1(n) + s_1(n-1)}{2}$$

$$s(n) = \frac{\frac{e(n)+e(n-1)}{2} + \frac{e(n-1)+e(n-2)}{2}}{2}$$

$$s(n) = \frac{e(n) + 2e(n-1) + e(n-2)}{4}$$

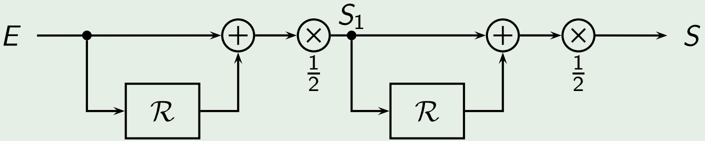
$$\text{Finalement : } S = \frac{1 + 2\mathcal{R} + \mathcal{R}^2}{4} E$$

Exercice I - À partir du diagramme blocs



$$S_1 = \frac{1+\mathcal{R}}{2} E$$
$$S = \frac{1+\mathcal{R}}{2} S_1$$

Exercice I - À partir du diagramme blocs



$$S_1 = \frac{1+\mathcal{R}}{2}E$$

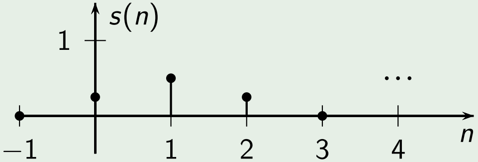
$$S = \frac{1+\mathcal{R}}{2}S_1$$

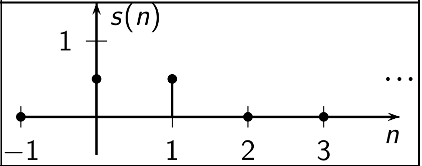
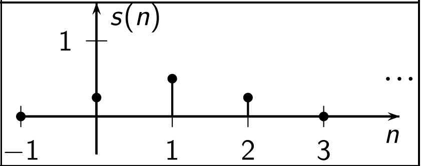
$$S = \frac{1+\mathcal{R}}{2}\frac{1+\mathcal{R}}{2}E$$

$$\text{Finalement : } S = \frac{1+2\mathcal{R}+\mathcal{R}^2}{4}E$$

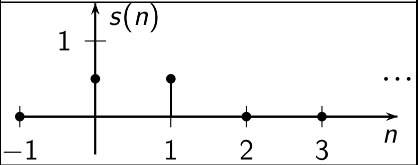
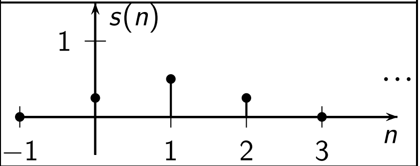
$$\text{et } \mathcal{H}_2(\mathcal{R}) = \frac{1+2\mathcal{R}+\mathcal{R}^2}{4}$$

Exercice I - Réponse impulsionnelle de S_2



Fonction de Transfert en $\mathcal{R}$	Réponse impulsionnelle
$\mathcal{H}_1(\mathcal{R}) = \frac{1+\mathcal{R}}{2}$	
$\mathcal{H}_2(\mathcal{R}) = \frac{1+2\mathcal{R}+\mathcal{R}^2}{4}$	

Quel est le lien entre fonction de transfert en $\mathcal{R}$ et réponse impulsionnelle ?

Fonction de Transfert en $\mathcal{R}$	Réponse impulsionnelle
$\mathcal{H}_1(\mathcal{R}) = \frac{1+\mathcal{R}}{2}$	
$\mathcal{H}_2(\mathcal{R}) = \frac{1+2\mathcal{R}+\mathcal{R}^2}{4}$	

Les coefficients du polynôme en $\mathcal{R}$ donnent la réponse impulsionnelle du système. Dans ces deux exemples, la réponse impulsionnelle est finie.

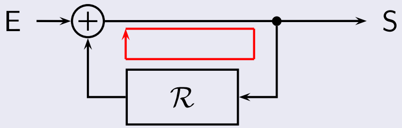
Exercice II - Fonction de transfert en $\mathcal{R}$ et réponse impulsionnelle

Soit un système dont la fonction de transfert en $\mathcal{R}$ est la suivante :

$$\frac{S}{E} = 1 + \mathcal{R} + \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^3 + \mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^5$$

1. Quelle est la réponse impulsionnelle de ce système ?
2. Quelle est son équation aux différences ?

Considérons le système S_3 suivant :

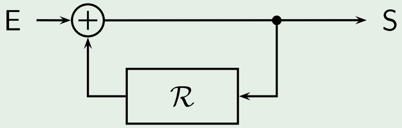


Ce système comporte une boucle de rétroaction, un « feedback »

Exercice III - Système bouclé

1. Exprimer la fonction de transfert en $\mathcal{R}$ de ce nouveau système
2. En déduire sa réponse impulsionnelle
3. Donner l'expression de son équation aux différences

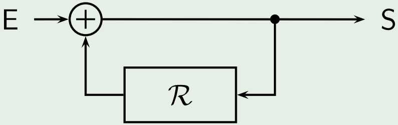
Exercice III - Fonction de transfert en $\mathcal{R}$



$$
\begin{aligned}
S &= \mathcal{R}S + E \\
(1-\mathcal{R})S &= E \\
\frac{S}{E} &= \frac{1}{1-\mathcal{R}}
\end{aligned}
$$

Remarque ?

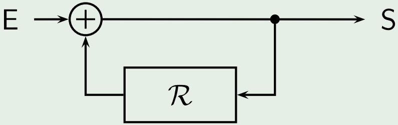
Exercice III - Fonction de transfert en $\mathcal{R}$



$$
\begin{aligned}
S &= \mathcal{R}S + E \\
(1-\mathcal{R})S &= E \\
\frac{S}{E} &= \frac{1}{1-\mathcal{R}}
\end{aligned}
$$

Ce n'est pas un polynôme en $\mathcal{R}$ mais une fonction rationnelle !

Exercice III - Fonction de transfert en $\mathcal{R}$



$$
\begin{aligned}
S &= \mathcal{R}S + E \\
(1-\mathcal{R})S &= E \\
\frac{S}{E} &= \frac{1}{1-\mathcal{R}}
\end{aligned}
$$

Ce n'est pas un polynôme en $\mathcal{R}$
mais une fonction rationnelle !
Il est donc impossible d'en déduire
directement la réponse impulsionnelle

Exercice III - Réponse impulsionnelle

Autre expression de $\frac{1}{1-\mathcal{R}}$

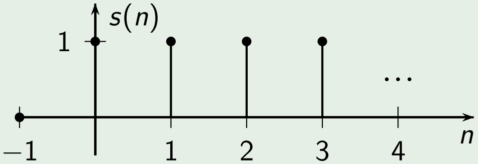
$$
\begin{array}{c|l}
1 & 1-\mathcal{R} \\
\cline{2-2}
\underline{-(1-\mathcal{R})} & 1+\mathcal{R}+\mathcal{R}^2+\mathcal{R}^3+\ldots \\
\mathcal{R} & \\
\underline{-(\mathcal{R}-\mathcal{R}^2)} & \\
\mathcal{R}^2 & \\
\ldots &
\end{array}
$$

$$\frac{1}{1-\mathcal{R}} = 1+\mathcal{R}+\mathcal{R}^2+\mathcal{R}^3+\ldots$$

On peut maintenant en déduire la réponse impulsionnelle

Exercice III - Réponse impulsionnelle

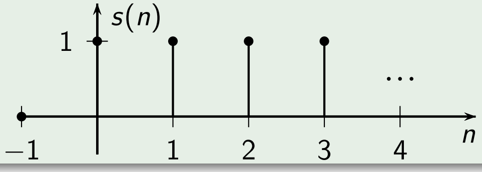
$$\frac{S}{E} = 1 + \mathcal{R} + \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^3 + \dots$$



On peut maintenant en déduire la réponse impulsionnelle

Exercice III - Réponse impulsionnelle

$$\frac{S}{E} = 1 + \mathcal{R} + \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^3 + \dots$$



Cette réponse impulsionnelle est donc infinie !

Exercice III - Équation aux différences

$$s(n) = s(n-1) + e(n)$$

Remarque ?

Exercice III - Équation aux différences

$$s(n) = s(n-1) + e(n)$$

Remarque ?

C'est une équation récurrente

Système sans rétroaction (sans feedback)

L'équation aux différences est non récurrente

La réponse impulsionnelle est finie

Ce sont des systèmes à Réponse Impulsionnelle Finie

On les appelle aussi : Filtres non récursifs

Système sans rétroaction (sans feedback)

L'équation aux différences est non récurrente

La réponse impulsionnelle est finie

Ce sont des systèmes à Réponse Impulsionnelle Finie

On les appelle aussi : Filtres non récursifs

Système avec rétroaction (avec feedback)

L'équation aux différences est récurrente

La réponse impulsionnelle est infinie

Ce sont des systèmes à Réponse Impulsionnelle Infinie

On les appelle aussi : Filtres récursifs

Dans les deux cas on a :

$$\mathcal{H}(\mathcal{R}) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\mathcal{R}^k$$

$h(k)$ **étant la réponse impulsionnelle du système**

Exercice IV - Approximation du moyenneur

Soit le système caractérisé par l'équation aux différences suivantes :

$$s(n) = a \cdot s(n-1) + b \cdot e(n) \text{ avec } a > 0,\ b > 0 \text{ et } a + b = 1$$

1. Représenter son diagramme bloc.
2. Exprimer sa fonction de transfert en $\mathcal{R}$.
3. Quel est le type de sa réponse impulsionnelle ? Justifier.
4. Donner l'expression générale de cette réponse impulsionnelle.

Exercice IV - Approximation du moyenneur

Soit le système caractérisé par l'équation aux différences suivantes :

$$s(n) = a \cdot s(n-1) + b \cdot e(n) \text{ avec } a > 0,\ b > 0 \text{ et } a + b = 1$$

5. Tracer 50 points de la réponse impulsionnelle avec Matlab pour les valeurs de a suivantes :
   5.1. $a = 0.25$
   5.2. $a = 0.5$
   5.3. $a = 0.9$
6. Comparer ces résultats avec celui trouvé à la question 4.

Signaux et Systèmes

Exercice V - Fonction de transfert en $\mathcal{R}$

Donner les fonctions de transfert en $\mathcal{R}$ des systèmes représentés par leurs équations aux différences suivantes :

1. $s(n) = \frac{e(n)-e(n-1)}{T_e}$
2. $s(n) = s(n-1) + s(n-2) + e(n)$
3. $s(n) = -a_1 \cdot s(n-1) - a_2 \cdot s(n-2) - a_3 \cdot s(n-3) + b_0 \cdot e(n) + b_1 \cdot e(n-1) + b_2 \cdot e(n-2)$