L3 - CMI017 : Signaux et Systèmes

BULOUP Frank

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Plan de cette séquence

Signaux et Systèmes

Savez-vous ce qu'est un **signal continu** ?

Savez-vous ce qu'est un **signal continu** ?

$$\Leftrightarrow$$

- Qu'est-ce qu'un **signal** ?
- Dans quel cas un signal est qualifié de **continu** ?

Voici quelques exemples pour vous aider :

Définition du terme « signal »

Dans le domaine de l'ingéniérie électrique, un signal est une manifestation d'un phénomène physique observable électriquement.

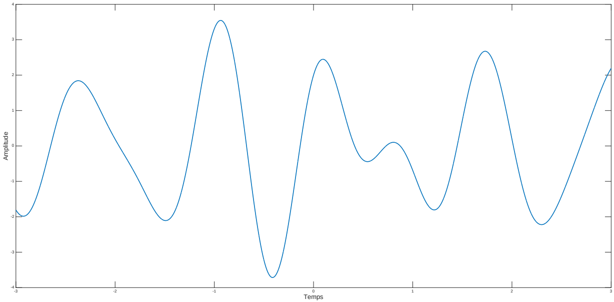
Définition du terme « **signal** »

Dans le domaine de l'ingéniérie électrique, un signal est une manifestation d'un phénomène physique observable électriquement.

Définition du terme « **continu** »

La notion de continu signifie que la grandeur électrique associée à ce signal peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné de valeurs réelles.

$\Leftrightarrow$ **Lié à la notion de capteur**



$$s(t) = cos(2\pi 1t) + cos(2\pi 1.2t) + 2sin(2\pi 0.75t)$$

Par opposition à « **continu** » !

Par opposition à « **continu** » !

De façon générale, tout fichier, toute donnée ayant été enregistrée sur un dispositif numérique

- ordinateur
- tablette
- téléphone portable
- . . .

Exercice I

Tracer le signal suivant en utilisant Matlab :

$$s(t) = cos(2\pi 1t) + cos(2\pi 1.2t) + 2sin(2\pi 0.75t)$$

1. Créer le vecteur temporel discret correspondant (pas de $\frac{1}{10}$ de seconde)
2. Tracer le signal en utilisant la commande **plot**
3. Mettre en évidence la discrétisation en éditant le graphe
4. Tracer le signal en utilisant la commande **stem**

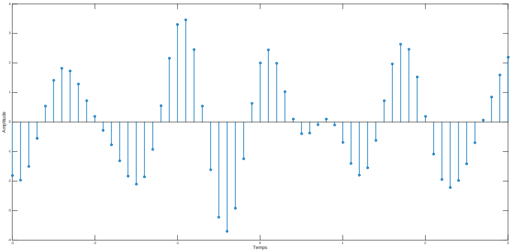
Exercice I

Tracer le signal suivant en utilisant Matlab :

$$s(t) = cos(2\pi 1t) + cos(2\pi 1.2t) + 2sin(2\pi 0.75t)$$

1. Créer le vecteur temporel discret correspondant (pas de $\frac{1}{10}$ de seconde)
2. Tracer le signal en utilisant la commande **plot**
3. Mettre en évidence la discrétisation en éditant le graphe
4. Tracer le signal en utilisant la commande **stem**

Plusieurs versions discrètes d'un signal sont possibles : cela dépend de la résolution temporelle (notion d'échantillonnage)



$$s(n\Delta t) = cos(2\pi 1 n\Delta t) + cos(2\pi 1.2 n\Delta t) + 2sin(2\pi 0.75 n\Delta t)$$

$$s(n) = cos(2\pi 1 n\Delta t) + cos(2\pi 1.2 n\Delta t) + 2sin(2\pi 0.75 n\Delta t)$$

Signaux et Systèmes

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Signal d'entrée}\\ e(t)\end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Signal de sortie}\\ s(t)\end{array}\right.$$

Définition

Un système continu est un dispositif qui transforme un signal continu

- Il est caractérisé par une équation différentielle (ED)
- La transformation dépend du type et des valeurs des paramètres de cette équation

Voici quelques exemples d'équations différentielles :

$$s' = \gamma e \quad (1)$$

$$s'' + \mu s' = \gamma e \quad (2)$$

$$t \cdot s' = \gamma e \quad (3)$$

$$(s')^2 = \gamma e \quad (4)$$

Les caractères en bleu sont les paramètres

Voici quelques exemples d'équations différentielles :

$$s' = \gamma e \tag{1}$$

$$s'' + \mu s' = \gamma e \tag{2}$$

$$t \cdot s' = \gamma e \tag{3}$$

$$(s')^2 = \gamma e \tag{4}$$

⇒ Si ces paramètres sont constants dans le temps, le système est dit invariant

Voici quelques exemples d'équations différentielles :

$$s' = \gamma e \tag{1}$$

$$s'' + \mu s' = \gamma e \tag{2}$$

$$t \cdot s' = \gamma e \tag{3}$$

$$(s')^2 = \gamma e \tag{4}$$

⇒ Si ces paramètres sont constants dans le temps, le système est dit invariant

Parmi les équation précédentes, quelles sont celles qui caractérisent un système invariant ?

Voici quelques exemples d'équations différentielles :

$$s' = \gamma e \checkmark \tag{1}$$

$$s'' + \mu s' = \gamma e \checkmark \tag{2}$$

$$t \cdot s' = \gamma e \tag{3}$$

$$(s')^2 = \gamma e \checkmark \tag{4}$$

$\Rightarrow$ Si ces paramètres sont constants dans le temps, le système est dit invariant

Parmi les équation précédentes, quelles sont celles qui caractérisent un système invariant ?

Invariance temporelle (Stationnarité)

Étant donné :

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s(t)$$

le système est invariant si :

$$e(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s(t-\tau)$$

Linéarité

Étant donné :

$$e_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s_1(t)$$

et :

$$e_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s_2(t)$$

le système est linéaire si :

$$\alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow \alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$$

est vrai pour tout α et β

Voici quelques exemples d'équations différentielles :

$$s' = \gamma e \tag{1}$$

$$s'' + \mu s' = \gamma e \tag{2}$$

$$t \cdot s' = \gamma e \tag{3}$$

$$(s')^2 = \gamma e \tag{4}$$

Parmi les équations précédentes, quelles sont celles qui caractérisent un système linéaire ?

Voici quelques exemples d'équations différentielles :

$$s' = \gamma e \checkmark \tag{1}$$

$$s'' + \mu s' = \gamma e \checkmark \tag{2}$$

$$t \cdot s' = \gamma e \checkmark \tag{3}$$

$$(s')^2 = \gamma e \tag{4}$$

Parmi les équations précédentes, quelles sont celles qui caractérisent un système linéaire ?

Linéarité et Invariance Temporelle

Système Continu Linéaire et Invariant dans le Temps (SCLIT)

Exercice II

Quelles sont parmi les ED suivantes celles qui caractérisent des SCLIT ?

$$s' - 2 \cdot s = e \tag{1}$$

$$s' + t \cdot s = e \tag{2}$$

$$s'' + s^2 = e \tag{3}$$

Linéarité et Invariance Temporelle

Système Continu Linéaire et Invariant dans le Temps (SCLIT)

Exercice II

Quelles sont parmi les ED suivantes celles qui caractérisent des SCLIT ?

$$s' - 2 \cdot s = e \checkmark \tag{1}$$

$$s' + t \cdot s = e \tag{2}$$

$$s'' + s^2 = e \tag{3}$$

$$\begin{cases}\text{Signal d'entrée}\\ e(nTe)\\ e(n)\end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow \begin{cases}\text{Signal de sortie}\\ s(nTe)\\ s(n)\end{cases}$$

Définition

Un système discret est un algorithme qui transforme un signal discret

- Il est caractérisé par une équation aux différences (EAD)
- La transformation dépend du type et des valeurs des paramètres de cette équation

Voici quelques exemples d'équations aux différences :

$$s(n) = \gamma e(n) \tag{1}$$

$$s(n-2) + \mu s(n-1) = \gamma e(n) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot s(n) = \gamma e(n) \tag{3}$$

$$(s(n))^{\mathbf{2}} = \gamma e(n) \tag{4}$$

Les caractères en bleu sont les paramètres

Voici quelques exemples d'équations aux différences :

$$s(n) = \gamma e(n) \quad (1)$$

$$s(n-2) + \mu s(n-1) = \gamma e(n) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{n} \cdot s(n) = \gamma e(n) \quad (3)$$

$$(s(n))^{\mathbf{2}} = \gamma e(n) \quad (4)$$

$\Rightarrow$ Si ces paramètres sont constants dans le temps, le système est dit invariant

Voici quelques exemples d'équations aux différences :

$$s(n) = \gamma e(n) \quad (1)$$

$$s(n-2) + \mu s(n-1) = \gamma e(n) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{n} \cdot s(n) = \gamma e(n) \quad (3)$$

$$(s(n))^{\mathbf{2}} = \gamma e(n) \quad (4)$$

⇒ Si ces paramètres sont constants dans le temps, le système est dit invariant

Parmi les équations précédentes, quelles sont celles qui caractérisent un système invariant ?

Voici quelques exemples d'équations aux différences :

$$s(n) = \gamma e(n) \checkmark \tag{1}$$

$$s(n-2) + \mu s(n-1) = \gamma e(n) \checkmark \tag{2}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot s(n) = \gamma e(n) \tag{3}$$

$$(s(n))^{\mathbf{2}} = \gamma e(n) \checkmark \tag{4}$$

$\Rightarrow$ **Si ces paramètres sont constants dans le temps, le système est dit invariant**

Parmi les équations précédentes, quelles sont celles qui caractérisent un système invariant ?

Invariance temporelle (Stationnarité)

Étant donné :

$$e(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s(n)$$

le système est invariant si :

$$e(n-n_0) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s(n-n_0)$$

Linéarité

Étant donné :

$$e_1(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s_1(n)$$

et :

$$e_2(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s_2(n)$$

le système est linéaire si :

$$\alpha e_1(n) + \beta e_2(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow \alpha s_1(n) + \beta s_2(n)$$

est vrai pour tout α et β

Voici quelques exemples d'équations aux différences :

$$s(n) = \gamma e(n) \tag{1}$$

$$s(n-2) + \mu s(n-1) = \gamma e(n) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot s(n) = \gamma e(n) \tag{3}$$

$$(s(n))^{\mathbf{2}} = \gamma e(n) \tag{4}$$

Parmi les équations précédentes, quelles sont celles qui caractérisent un système linéaire ?

Voici quelques exemples d'équations aux différences :

$$s(n) = \gamma e(n) \checkmark \tag{1}$$

$$s(n-2) + \mu s(n-1) = \gamma e(n) \checkmark \tag{2}$$

$$n \cdot s(n) = \gamma e(n) \checkmark \tag{3}$$

$$(s(n))^{\mathbf{2}} = \gamma e(n) \tag{4}$$

Parmi les équations précédentes, quelles sont celles qui caractérisent un système linéaire ?

Linéarité et Invariance Temporelle

Système Discret Linéaire et Invariant dans le Temps (SDLIT)

Exercice III

Quelles sont parmi les EAD suivantes celles qui caractérisent des SDLIT ?

$$s(n) = \frac{e(n) - e(n-1)}{T} \tag{1}$$

$$2s(n+1) - s(n) = \frac{e(n)}{s(n)} \tag{2}$$

$$s(n+1) + n \cdot s(n) = e(n) \tag{3}$$

Linéarité et Invariance Temporelle

Système Discret Linéaire et Invariant dans le Temps (SDLIT)

Exercice III

Quelles sont parmi les EAD suivantes celles qui caractérisent des SDLIT ?

$$s(n) = \frac{e(n) - e(n-1)}{T} \checkmark \tag{1}$$

$$2s(n+1) - s(n) = \frac{e(n)}{s(n)} \tag{2}$$

$$s(n+1) + n \cdot s(n) = e(n) \tag{3}$$

Signaux et Systèmes

Sur un exemple d'un système nommé S_1, on connait déjà :

La description textuelle de S_1

Le système calcule une moyenne mobile sur deux échantillons

Sur un exemple d'un système nommé S_1, on connait déjà :

La description textuelle de S_1

Le système calcule une moyenne mobile sur deux échantillons

L'équation aux différences de S_1

$$s(n) = \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$

Diagramme bloc de S_1

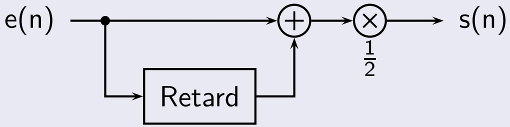
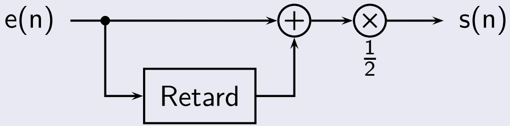


Diagramme bloc de S_1



Exercice V

Représenter les diagrammes blocs associés à ces EAD :

$$s(n) = \frac{e(n) - e(n-1)}{T} \tag{1}$$

$$s(n) = s(n+1) + T \cdot e(n) \tag{2}$$

$$s(n) = e(n) + s(n-1) + s(n-2) \tag{3}$$

Définition de l'impulsion unitaire

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition

La réponse impulsionnelle d'un SDLIT est le signal de sortie de ce système lorsqu'une impulsion unitaire lui est appliquée en entrée.

Forme générale de l'EAD

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)e(n-k) - \sum_{k=1}^{M-1} a(k)s(n-k)$$

- $a(k)$ et $b(k)$ sont les paramètres, les coefficients de l'EAD
- Matlab possède une fonction nommé **impz** qui permet de calculer directement la réponse impulsionnelle
- Ces coefficients peuvent être utilisés directement dans la fonction **impz** de Matlab avec $a(0) = 1$

Exercice VI

Calculer la réponse impulsionnelle de S_1 à partir :

1. de son EAD
2. de son diagramme bloc
3. en utilisant la fonction **impz** de Matlab

Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1

À partir de l'équation aux différences avec $e(n) = \delta(n)$:

$$\text{pour } n = 0,\ s(0) = \frac{\delta(0) + \delta(-1)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1

À partir de l'équation aux différences avec $e(n) = \delta(n)$:

$$\text{pour } n = 0,\ s(0) = \frac{\delta(0) + \delta(-1)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\text{pour } n = 1,\ s(1) = \frac{\delta(1) + \delta(0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

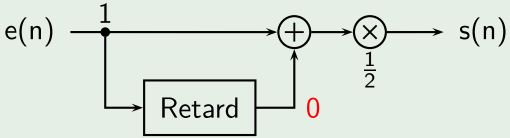
Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1

À partir de l'équation aux différences avec $e(n) = \delta(n)$:

$$\text{pour } n = 0,\ s(0) = \frac{\delta(0) + \delta(-1)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\text{pour } n = 1,\ s(1) = \frac{\delta(1) + \delta(0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\text{pour } n \geq 2,\ s(n) = \frac{\delta(n) + \delta(n-1)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1

À partir du diagramme bloc avec $e(n) = \delta(n)$ pour $n = 0$:



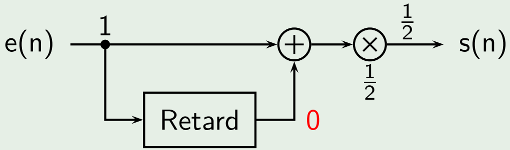
Démarrage au repos

$\Rightarrow$

Notion de conditions initiales : états des sorties des retards

Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1

À partir du diagramme bloc avec $e(n) = \delta(n)$ pour $n = 0$:



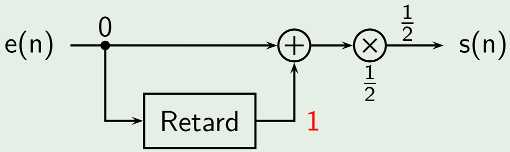
Démarrage au repos

$\Rightarrow$

Notion de conditions initiales : états des sorties des retards

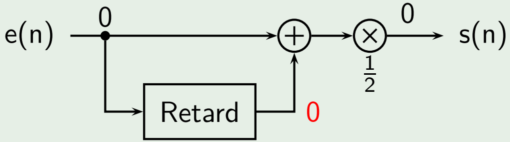
Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1

À partir du diagramme bloc avec $e(n) = \delta(n)$ pour $n = 1$:

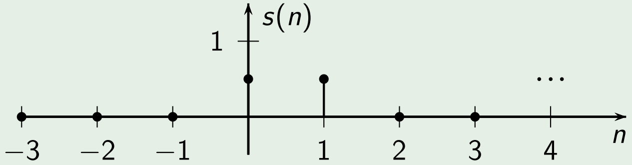


Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1

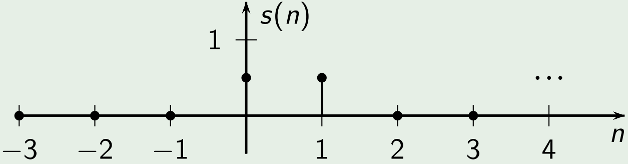
À partir du diagramme bloc avec $e(n) = \delta(n)$ pour $n = 2$:



Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1



Exercice VI - Réponse impulsionnelle de S_1



La réponse impulsionnelle est finie

Signaux et Systèmes

Exercice VII

Représenter les diagrammes blocs et calculer les réponses impulsionnelles des SDLIT définis par les EAD suivantes :

$$s(n) = \mu s(n-1) + \gamma e(n) \text{ avec } \mu > \gamma \tag{1}$$

$$3s(n) = e(n) + e(n-1) + e(n-2) \tag{2}$$

On considèrera les conditions initiales comme nulles

Exercice VIII

Donner l'EAD du système représenté par le diagramme bloc suivant et calculer sa réponse impulsionnelle :